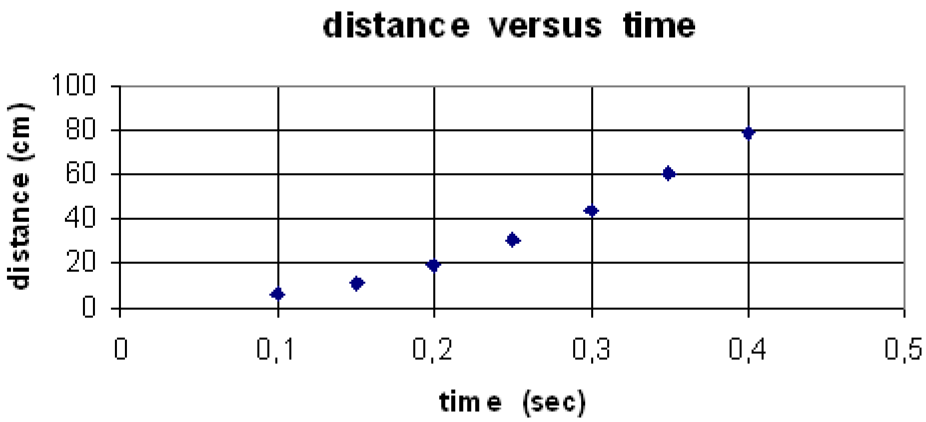
Χάραξη γραφημάτων/Lab Graphing

Η χάραξη ή γραφημάτων (ή γραφικών παραστάσεων) είναι μια πολύ σημαντική εργασία στη πειραματική φυσική. Γραφήματα παρέχουν ένα αποδοτικό τρόπο για να απεικονίζεται η σχέση μεταξύ των δύο πειραματικών παραμέτρων και να συνοψίζονται πειραματικά αποτελέσματα. Μερικά γραφήματα στην αρχή του εργαστηριακού μαθήματος θα πρέπει να τα κάνετε με το χέρι που για να βεβαιωθείτε ότι έχετε κατανοήσει όλα τις λεπτομέρειες που εμπλέκονται στη χάραξη ενός αποτελεσματικού επιστημονικού γραφήματος. Θα μάθετε επίσης πώς θα χρησιμοποιείτε τον υπολογιστή για τη γραφική παράσταση των δεδομένων σας. Όταν θα χρειαστεί να χαράξετε γραφικές παραστάσεις σε εργαστηριακές ασκήσεις, θα σας ζητηθεί "να σχεδιάσεις τη μεταβλητή Α συναρτήσει της μεταβλητής Β". Κατά συνθήκη, η Α (η εξαρτημένη μεταβλητή) θα πρέπει να σχεδιάζεται κατά μήκος του κάθετου άξονα (τεταγμένη-ordinate), και η Β (η ανεξάρτητη μεταβλητή), θα πρέπει να ορίζεται κατά μήκος του οριζόντιου άξονα (τετμημένη-abscissa). Ακολουθεί είναι ένα τυπικό παράδειγμα στο οποίο παρίσταται γραφικώς η απόσταση συναρτήσει του χρόνου για ένα αντικείμενο σε ελεύθερη πτώση:



Μιλλιμετρέ χαρτί /Graph Paper

Τα γραφήματα, που προορίζονται για να παράσχουν αριθμητικές πληροφορίες, θα πρέπει πάντα να χαράσσονται σε τετράγωνο χαρτί γραφήματος (μιλλιμετρέ χαρτί), 1cm × 1cm με 10 υποδιαιρέσεις ανά cm. Χρησιμοποιήστε ένα αιχμηρό μολύβι (όχι στυλό) για να σχεδιάζετε τις γραφικές παραστάσεις, ώστε τα αναπόφευκτα λάθη να μπορούν να διορθωθούν εύκολα.

Title

Κάθε γράφημα πρέπει να έχει έναν τίτλο που αναφέρει σαφώς ποιές μεταβλητές εμφανίζονται στο γράφημα. Γράψτε ακόμη το όνομά σας και την ημερομηνία πάνω στο χαρτί του γραφήματος.

Axis labels

Πάνω σε κάθε άξονα συντεταγμένων ενός γραφήματος θα πρέπει να αναγράφεται μια λέξη ή ένα σύμβολο που παριστάνει τη μεταβλητή η οποία χαράσσεται κατά μήκος του άξονα αυτού, και να συμπεριλαμβάνονται (σε παρένθεση) και οι αντίστοιχες μονάδες της μεταβλητής.

Επιλογή κλίμακας/Choice of Scale

Οι κλίμακες στους άξονες επιλέγονται κατά τέτοιο τρόπο ώστε να είναι εύκολο να σχεδιάζονται τα δεδομένα και να διαβάζονται. Στο μιλλιμετρέ χαρτί, κάθε 5η ή κάθε 10η γραμμή θα είναι ελαφρά εντονότερη από τι άλλες γραμμές. Τέτοια κύρια γραμμή θα αντιπροσωπεύει ένα δεκαδικά πολλαπλάσια του 1, του 2 , ή του 5. Άλλες επιλογές (όπως, 0.3) κάνουν τη σχεδίαση και την ανάγνωση των δεδομένων πολύ δύσκολη. Η ελάχιστη υποδιαίρεση μιας κλίμακας δεν θα πρέπει να είναι μικρότερη από τη μικρότερη υποδιαίρεση του οργάνου μέτρησης. Για παράδειγμα, δεδομένα που πάρθηκαν με ένα κοινό μέτρο μήκους (με ακρίβεια 1mm) δεν θα πρέπει να σχεδιαστούν σε κλίμακα με μικρότερη υποδιαίρεση από 1 mm. Στην επιλογή της κλίμακα θα πρέπει να φροντίζετε ώστε όλη η γραφ. παράσταση να χωρέσει στο μιλλιμετρέ χαρτί που έχετε στη διάθεσή σας. Σαν εικόνα, το γράφημα θα πρέπει να είναι περίπου τετράγωνο, οπότε οι κλίμακες που επιλέγετε πρέπει να οδηγούν σ' αυτό το αποτέλεσμα. Προς αυτό το σκοπό, μερικές φορές δεν είναι πάντα απαραίτητο να περιλαμβάνουν η αρχή της κλίμακας (δηλ. το 0) πάνω στον άξονα. Σε πολλές περιπτώσεις, μόνο το τμήμα της κλίμακας που να καλύπτει τα δεδομένα μπορεί να εμφανίζεται.

Σημεία Δεδομένων /Data Points

Εισάγετε τα σημεία δεδομένων στο γράφημα τοποθετώντας μια μικρή τελίτσα στις συντεταγμένες του σημείου και στη συνέχεια χαράσσοντας ένα μικρό κύκλο γύρω από το σημείο. Εάν πρόκειται να χρησιμοποιήσετε περισσότερα από ένα σετ δεδομένων, τότε χρησιμοποιήστε διαφορετικά σύμβολα (π.χ. □, o, *, ♦) για να διακρίνονται τα σύνολα δεδομένων.

Καμπύλες /Curves

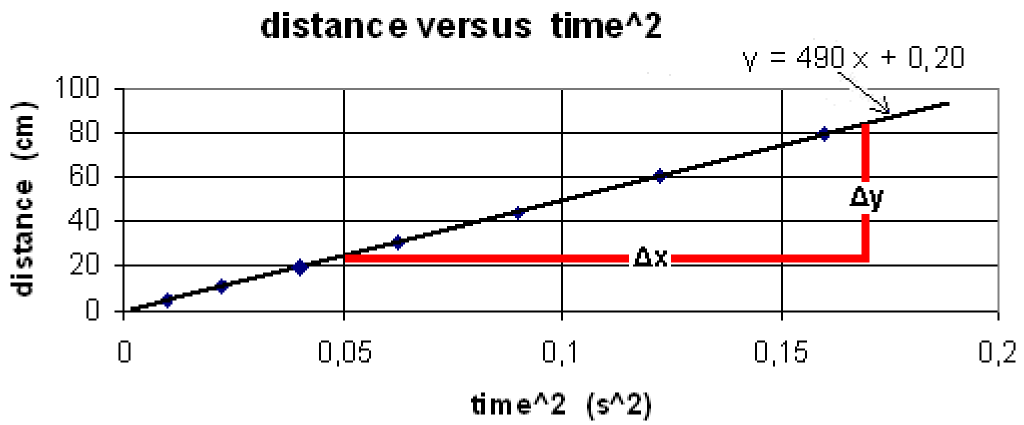
Σχεδιάστε μια απλή ομαλή καμπύλη δια μέσου των σημείων δεδομένων. Η καμπύλη δεν θα περάσει απαραίτητα πάνω από όλα τα σημεία, αλλά θα πρέπει να περάσει όσο γίνεται πιο κοντά προς όλα τα σημεία, προσέχοντας περίπου τα μισά σημεία να βρίσκονται από τη μια μεριά πλευρά της καμπύλης και άλλα τόσα από την άλλη. Αυτή η καμπύλη είναι σαν οδηγός στο μάτι κατά μήκος των σημείων δεδομένων και υποδείξει τη τάση (the trend) των στοιχείων δεδομένων. Αυτή η καμπύλη δείχνει τη μέση τάση των δεδομένων, και τυχόν προβλεπόμενες τιμές θα πρέπει να διαβάζονται από αυτή την καμπύλη, αντί να γυρνάτε πίσω στα αρχικά σημεία δεδομένων.

Ευθύγραμμα Γραφήματα / Straight-line Graphs

Σε πολλές από τις ασκήσεις του εργαστηρίου, θα σας ζητηθεί να χαράξετε τη γραφ. παράσταση των πειραματικών αποτελεσμάτων σας με τέτοιο τρόπο ώστε να διαφανεί (ή όχι) γραμμική σχέση μεταξύ των ποσοτήτων του γραφήματος. Σε αυτές τις περιπτώσεις, θα σας ζητηθεί να προσαρμόσετε μια ευθεία γραμμή στα σημεία των δεδομένων σας και να προσδιορίσετε από το γράφημα την κλίση και το σημείο τομής με τον y-άξονα. Στο παραπάνω παράδειγμα, αναμένεται ότι η απόσταση του αντικειμένου που πέφτει ελεύθερα μεταβάλλεται με το χρόνο, σύμφωνα με τη σχέση: $d = \frac{1}{2} g t^2$. Είναι δύσκολο να δει κανείς αν τα δεδομένα που απεικονίζονται στο παραπάνω γράφημα συμφωνούν με αυτή την πρόβλεψη. Ωστόσο, αν χαραχθεί η γραφ. παράσταση d *vs.* t^2, θα πρέπει να προκύψει ευθεία γραμμή με κλίση ≅ g/2 και με διατομή y ≅ 0.

Προσαρμογή δεδομένων σε ευθεία γραμμή /Straight Line Fitting

Τοποθετήστε ένα διαφανή χάρακα πάνω στα σημεία δεδομένων σας και ρυθμίστε έτσι ώστε η άκρη του χάρακα να είναι όσο το δυνατόν πλησιέστερα σε όλα τα σημεία δεδομένων. Η καλύτερη προσαρμογή θα φέρει περίπου τα μισά των σημείων κάτω από την άκρη του χάρακα και τα άλλα μισά από πάνω, ομοιόμορφα κατανεμημένα κατά μήκος της γραμμής. Τραβήξετε μια γραμμή κατά μήκος της άκρης του χάρακα που εκτείνεται κατά το ένα άκρο μέχρι το πλησιέστερο άξονα συντεταγμένων και στο άλλο άκρο λίγο πιο πέρα από το τελευταίο σημείο δεδομένων. Ο βαθμός στον οποίο τα δεδομένα είναι συνεπή με την εξίσωση αυτή, φαίνεται από το πόσο κοντά είναι τα σημεία δεδομένων προς τη προσαρμοσμένη γραμμή. Η χάραξη αυτής της ευθείας γραμμής στην ουσία εκτελεί μια εξομάλυνση των πειραματικών δεδομένων, και έτσι μπορεί να δίδει πιο αξιόπιστη εικόνα των αποτελεσμάτων του πειράματος απ' ότι αν λαμβάνατε ξεχωριστά καθένα ζεύγος δεδομένων. Οι μετρήσεις που λαμβάνονται από το διάγραμμα θα πρέπει να γίνονται πάνω στην προσαρμοσμένη γραμμή και όχι για τα σημεία δεδομένων τους. Μην «εξαναγκάσετε» την προσαρμοσμένη γραμμή να περάσει μέσα από την αρχή των συντεταγμένων, ακόμη και αν η υποτιθέμενη μαθηματική συνάρτηση περνά από το (0,0), όπως στο παραπάνω παράδειγμα της συνάρτησης $d = (g /2)\ t^2$.



Κλίση και διατομή / Slope and Intercept

Η κλίση μιας ευθείας γραμμής υπολογίζεται διαιρώντας το μήκος «Δy» από το μήκος «Δx» του τριγώνου, όπως φαίνεται στο σχήμα. Το τρίγωνο που επιλέγεται πρέπει να είναι όσο το δυνατόν μεγαλύτερο. Διαβάζετε τα μήκη «Δx» και «Δy» προβάλλοντας τα πάνω στους αντίστοιχους άξονες. Ο υπολογισμός της κλίσης αναγράφεται κάτω από το αντίστοιχο γράφημα. Αν ζητηθεί να προσδιοριστεί η διατομή στον y-άξονα, σημάδεψε το σημείο της διατομής, εκεί όπου η γραμμή σας τέμνει τον κατακόρυφο άξονα (υποθέτοντας ότι η κλίμακα στον x- άξονα αρχίζει από το ‘0’).

Σφάλματα κλίσης και διατομής/Uncertainty in Slope + Intercept

Η αβεβαιότητα στην κλίση και στη διατομή μπορεί να εκτιμηθεί τραβώντας δύο ευθείες γραμμές με τη μέγιστη και την ελάχιστη κλίση κατά τη κρίση σας, οι οποίες εξακολουθούν να περνούν μέσα από τα περισσότερα από τα σημεία δεδομένων. Οι αντίστοιχες διαφορές στις κλίσεις και στις διατομές μπορούν να χρησιμοποιηθούν ως μια εκτίμηση του σφάλματος γι αυτά τα μεγέθη.

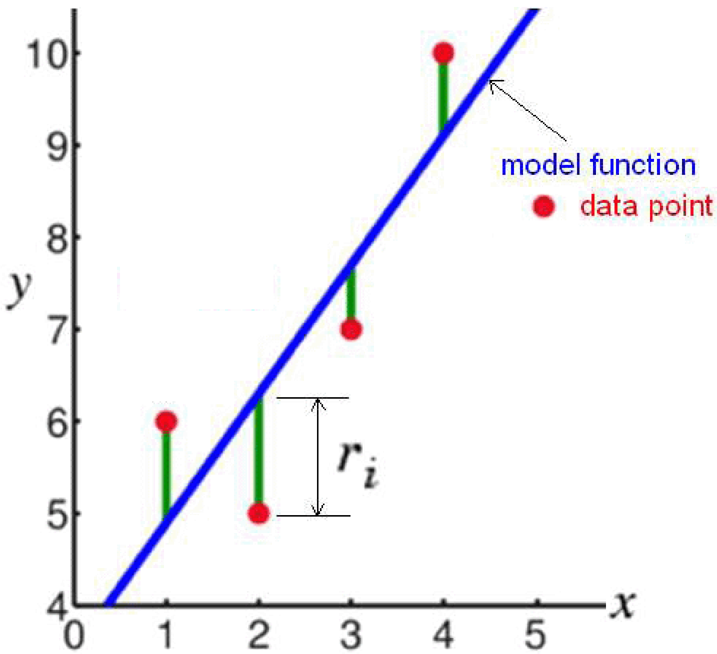
(Ζυγισμένη) Μέθοδος ελαχίστων τετραγώνων / (Weighted) Least Squares Fitting

Έστω x, y δύο φυσικές μεταβλητές, οι οποίες υποθέτουμε ότι συνδέονται με μια γραμμική σχέση: $y = a + bx$. Το γράφημα *y vs. x* θα πρέπει να είναι μια ευθεία γραμμή, η οποία να έχει κλίση = b και να τέμνει τον y-άξονα στο σημείο διατομής y = a.

Ας υποθέσουμε ότι έχομε N μετρήσεις των x και y με τιμές (x_1, y_1), (x_2, y_2), ..., (x_N, y_N) και ότι οι μετρήσεις του x έχουν αμελητέα σφάλμα, ενώ οι μετρήσεις του y συνοδεύονται από τα αντίστοιχα σφάλματα σ_1, σ_2, ..., σ_N. Η γραφική παράσταση αυτού του συνόλου των μετρήσεων απεικονίζεται στο παρακάνω σχήμα. Θέλουμε να βρούμε μια ευθεία της μορφής $y = a + bx$, η οποία να περνά όσο πιο αντιπροσωπευτικά γίνεται μέσα από τα σημεία των δεδομένων μας. Στη θεωρία των προσεγγίσεων (approximation theory), η διεργασία αυτή λέγεται **γραμμική προσαρμογή των ελαχίστων τετραγώνων** (linear least square fitting). Σύμφωνα με την μέθοδο αυτή, οι καλύτερες τιμές για τις παραμέτρους a και b είναι εκείνες που ελαχιστοποιούν το άθροισμα των τετραγώνων (Chi-squared):

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{N}\left(\frac{y_i - (a + bx_i)}{\sigma_i}\right)^2 \qquad (1)$$

Οι διαφορές $r_i = y_i - f(x_i)$, όπου $f_i = a + bx_i$, καλούνται **υπόλοιπα** (residuals) και παριστάνουν την απόκλιση της μετρούμενης τιμής y_i από την τιμή της συνάρτησης $f(x_i)$ στο σημείο x_i. Νε την μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων μπορούν να υπολογιστούν οι σταθερές a και b για τις οποίες ελαχιστοποιείται το άθροισμα των τετραγώνων των αποκλίσεων (1), ζυγισμένες από την αντίστοιχη αβεβαιότητα τους.



Στο εργαστήριο αυτό, θα χρησιμοποιήσετε λογισμικό ανάλυσης δεδομένων, όπως το Excel, το οποίο μπορεί υπολογίζει αυτόματα τις βέλτιστες τιμές των a και b, και τα αντίστοιχα σφάλματα, σ_a και σ_b. Αν τα σημεία δεδομένων συνοδεύονται από σφάλματα διαφορετικά μεταξύ τους, τότε εκείνα τα σημεία με τα μεγάλα σφάλματα θα πρέπει να έχουν μικρότερη βαρύτητα στο παραπάνω άθροισμα (1). Επομένως, η ζυγισμένη εκδοχή της μεθόδου των ελαχίστων τετραγώνων ταιριάζει σ' αυτές τις περιπτώσεις. Οι τιμές των a και b, όπως και τα αντίστοιχα σφάλματα, σ_a και σ_b, δίδονται από τις ακόλουθες σχέσεις (cf. P.R. Bevington and D.K. Robinson, "*Data Reduction and Error Analysis for the Physical Sciences*" (1992, McGraw-Hill)),

$$a = \frac{1}{\Delta}\left(\sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{N}} \frac{x_i^2}{\sigma_i^2} \cdot \sum_{j=1}^{\mathrm{N}} \frac{y_j}{\sigma_j^2} - \sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{N}} \frac{x_i}{\sigma_i^2} \cdot \sum_{j=1}^{\mathrm{N}} \frac{x_j y_j}{\sigma_j^2} \right), \quad b = \frac{1}{\Delta}\left(\sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{N}} \frac{1}{\sigma_i^2} \cdot \sum_{j=1}^{\mathrm{N}} \frac{x_j y_j}{\sigma_j^2} - \sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{N}} \frac{x_i}{\sigma_i^2} \cdot \sum_{j=1}^{\mathrm{N}} \frac{y_j}{\sigma_j^2} \right),$$

και $\sigma_a^2 = \frac{1}{\Delta} \sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{N}} \frac{x_i^2}{\sigma_i^2}$, $\sigma_b^2 = \frac{1}{\Delta} \sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{N}} \frac{1}{\sigma_i^2}$, όπου $\Delta = \sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{N}} \frac{1}{\sigma_i^2} \cdot \sum_{j=1}^{\mathrm{N}} \frac{x_j^2}{\sigma_j^2} - (\sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{N}} \frac{x_i}{\sigma_i^2})^2$.

Αν όμως όλα τα σημεία των δεδομένων έχουν το ίδιο σφάλμα, τότε ενδείκνυται να χρησιμοποιείται η μη ζυγισμένη προσαρμογή των ελαχίστων τετραγώνων. Τώρα η ελαχιστοποίηση του αθροίσματος των τετραγώνων των υπολοίπων

$$S = \sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{N}} (r_i)^2 = \sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{N}} \left(y_i - (a + b x_i)\right)^2 \qquad (2)$$

θα μας δώσει τις βέλτιστες τιμές των a και b (βλέπε υπολογισμούς στο εργαστηριακό βιβλίο, σχέσεις (7a) και (7b)). Η προσαρμογή θεωρείται πολύ καλή, αν $\chi^2 \to 1$ ή ισοδύναμα $S \to 0$.